21/10/2015

$\varphi [a,b] \to [a,b]$, τοτε η φ έχει σταθερό σημείο στο $[a,b]$

Συνθήκες Συγκλισης

Ορισμός Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ενα διάστημα. Η συνάρτηση φ πληρεί την συνθηκη Lipschitz στο I αν υπάρχει $C>0$ τετοιο ωστε $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq C|x-y|$ $\forall\, x,y \in I$

(Δ Αν πληρειται η συνθήκη σε ενα διάστημα τοτε ειναι και συνεχής σε αυτο)

- Αν $C<1$ η φ λέγεται συστολή
- Αν $\varphi \in C^1[a,b]$ τοτε πληρειται η Lipschitz για της φ στο $[a,b]$

$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| =$ (Απο Θεωρημα Μεσης Τιμης)

$= |\varphi'(\xi)||x-y| \leq \max_{a \leq \xi \leq b} |\varphi'(\xi)||x-y| = c|x-y|$ $\forall\, x,y \in [a,b], \xi \in (a,b)$

(Απο Θεωρημα Μεσης Τιμης)

- Αν $\varphi \in C^1(a,b)$, τοτε δεν πληρεί κατά ανάγκη την συνθηκη Lipschitz

Παραδειγμα $\varphi(x) = \sqrt{x} \in C^1(0,1)$ συνεχής και παρ/μη στο $(0,1)$.
Η φ δεν πληρεί την συνθηκη Lipschitz διοτι $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = +\infty$
$(L<1)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (συστολής) Αν $\varphi\ [a,b] \to [a,b]$, τότε η φ έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο x^* στο $[a,b]$. Η ακολουθία που παράγει η $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ για $n=1,2,\dots$, $x_0 \in [a,b]$ είναι καλά ορισμένη (όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στο $[a,b]$). Η ακολουθία συγκλίνει στο x^* για κάθε επιλογή $x_0 \in [a,b]$ και για την ταχύτητα σύγκλισης ισχύουν

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*| \le L^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}.$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Απόδειξη Η ύπαρξη εξασφαλίζεται επειδή $\varphi\ [a,b] \to [a,b]$

Μοναδικότητα Έστω x^*, y^* δύο σταθερά σημεία στο $[a,b]$ τότε $|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)|$ (αφού x^*, y^* σταθερά σημεία). Με την συνθήκη συστολής έχω $|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \le L|x^* - y^*| < |x^* - y^*|$

Καλά Ορισμένη Επειδή $\varphi\ [a,b] \to [a,b]$, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στο $[a,b]$

Σύγκλιση $|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \overset{\text{συνθηκη συστολης}}{\le} L|x_{n-1} - x^*| \le L^2|x_{n-2} - x^*| \le \underbrace{\dots}_{n \text{ φορές}} \le L^n|x_0 - x^*| < L^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}$ Επειδή $L<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$ επομένως η ακολουθία συγκλίνει στο x^*

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ότι: $|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \le L|x_1 - x_0|$

$|x_3 - x_2| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le L|x_2 - x_1| \le L^2|x_1 - x_0|$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΑ $\rightsquigarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ |x_{n+1} - x_n| \le L^n |x_1 - x_0| \end{array}\right.$$

Για ν.δ.ο ΕΙΝΑΙ CAUCHY: $n \in \mathbb{N}$ κ.λ.π. : $|x_{n+k} - x_n| \le |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$ (προσθαφαιρέσαμε όλους τους ενδιάμεσους όρους και εφαρμόσαμε τριγωνική ανισότητα)

$$\le \left(L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n\right)|x_1 - x_0| = L^n \underbrace{\left(1 + L + L^2 + \dots + L^{k-1}\right)}_{\text{άθροισμα } k \text{ όρων μια γεωμ. προόδου}} |x_1 - x_0|$$

$= L^n \frac{1 - L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0| \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Επομένως συγκλίνουσα.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = |x - x_n|$, g συνεχής

$$|x^* - x_n| = g(x^*) = g(\lim_{k\to\infty} x_{n+k}) \underset{\text{ΣΥΝΕΧΕΙΑ}}{=} \lim_{k\to\infty} g(x_{n+k}) = \lim_{k\to\infty} |x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Θεωρώ $y_0 = x_{n-1}$ τότε $y_1 = \phi(y_0) = \phi(x_{n-1}) = x_n$

Η δεύτερη ανισότητα με $n = 1$ για την ακολουθία (y_m)

$$|y_1 - x^*| \leq \frac{L^1}{1-L} |y_1 - y_0| \Leftrightarrow |x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγεται απ' την επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = \phi(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \ldots, n$ $x_0 \in [a, b]$. Είναι τουλάχιστον γραμμικής σύγκλισης ή σύγκλισης τάξης 1 αν $\exists$ $0 \leq c < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_{n+1} - x^*| \leq c |x_n - x^*|$, $\forall n \geq N$. Είναι τάξης σύγκλισης τουλάχιστον $p > 1$ αν $\exists$ $c \geq 0$ τέτοιος ώστε $|x_{n+1} - x^*| \leq c |x_n - x^*|^p = \tilde{c} |x_n - x^*|^{p-1} \cdot |x_n - x^*|$, $\tilde{c} < 1$, $n \in \mathbb{N}$

Αν είναι τάξης p, θα είναι και q, $1 \leq q \leq p$.

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c |x_n - x^*|^p = c |x_n - x^*|^{p-q} |x - x^*|^q = \tilde{c} |x_1 - x^*|^q$$

Αν η ακολουθία είναι τουλάχιστον p τάξης, τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{|x_n - x^*|^p} = a$ φραγμένο

Αν $a \neq 0$ τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p